推測統計 [数理統計学]V

石綿 元

第１０回講義

目次

1　分散分析

1.1　分散分析 (ANOVA)/実験計画法

いくつかの集団から標本をそれぞれ取ってくるとする。このとき、それぞれの標本が属する集団の平均がそれぞれ等しいかどうか知りたい。具体的な例を挙げると、実験を繰り返して、データを得るとき、本質的な集団の違いを原因に持つデータ間のばらつきとそれぞれの集団内部に存在する誤差によるばらつきがある。本質的な集団間のばらつきが、誤差によるばらつきと比べて大きければ、集団間に本質的な違いがあると認められると考えられる。そこで、全体の総平方和を集団間の平方和と誤差の平方和にわけて解析する方法を導入する。この方法を分散分析もしくは ANOVA または実験計画法と呼ぶ。

1.2　基本用語の導入

■因子　いま対象としている集団に違いを生じさせる原因のことを因子という。

■水準　各因子の中での条件の違いのことを水準という。

■平均平方　分散のことを分散分析では平均平方ということがある。不偏分散と同様に分母は自由度である。

■主効果　集団に違いを与えている因子の効果。

■交互作用　二つの因子が集団に与える効果。

■要因　集団に影響を与えている効果の総称で、主効果、交互作用、誤差など。

1.3　一元配置分散分析

一般的に実験では、条件を変えて何度も測定を繰り返す。
例）ラットの肝臓の重量とえさの関係を調べる実験を考える。

■因子

$$\text{因子}\begin{cases}\text{えさの種類}\\\text{運動の量}\\\cdots\cdots\end{cases}$$

■水準

- 因子 1 ：えさの種類

$$\begin{cases}\text{水準 1 ：ビーフジャーキー}\\\text{水準 2 ：モンプチ}\\\text{水準 3 ：ビタワン}\end{cases}$$

- 因子 2 ：運動の量

$$\begin{cases}\text{水準 1 ：ハムスター用ぐるぐる回転車で計測した回転数}\\\text{水準 2 ：迷路を歩かせて測定した歩いた距離}\end{cases}$$

■一元配置データ　ここでは、上記の例のうち、因子 1 についてのみ扱うこととする。

水準	ビーフジャーキー	モンプチ	ビタワン	
	3.42	3.17	3.64	
	3.87	3.63	3.72	
	3.96	3.47	3.91	
	3.76	3.44		
		3.39		
合計	15.01	17.1	11.27	総計 $S = 43.38$
データの大きさ	4	5	3	$n = 12$
平均	$\bar{x}_1 = 3.75$	$\bar{x}_2 = 3.42$	$\bar{x}_3 = 3.76$	$\bar{x} = 3.62$

ここで、次のように記号を導入しておく。i 行 j 列としてそれぞれの成分について x_{ij} と表すと、

水準	ビーフジャーキー (x_{i1})	モンプチ (x_{i2})	ビタワン (x_{i3})	$\leftarrow p$ 個の水準。いま $p = 3$
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	
	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
	x_{41}	x_{42}		
		x_{52}		
データの大きさ	k	l	m	$n = k + l + m$
合計	$\sum_{i=1}^{k} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{l} x_{i2}$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i3}$	総計 $S = \sum_j \sum_i x_{ij}$
平均	$\bar{x}_1 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_{i1}$	$\bar{x}_2 = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} x_{i2}$	$\bar{x}_3 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_{i3}$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_j \sum_i x_{ij}$

■一元配置分散分析表　まず、級間の平方和と全体の平方和を求めておく。

- 級間の平方和について記号を導入した先の例について考えると、

$$T_A = k(\bar{x_1} - \bar{x})^2 + l(\bar{x_2} - \bar{x})^2 + m(\bar{x_3} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^{p} (\text{j ごとの個数}) \times (\bar{x_j} - \bar{x})^2$$

- 全体の平方和は、

$$T = \sum_{i=1}^{\text{個数}} \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - \bar{x})^2$$

つぎに、級内の残差について求める。

$$T_e = T - T_A$$

自由度については、級間の自由度と全体の自由度を求めてから、級内残差の自由度を求めておく。

- 級間の自由度

$$\phi_A = p - 1$$

- 全体の自由度

$$\phi = n - 1$$

- 級内残差の自由度

$$\phi_e = \phi - \phi_A$$

	平方和	自由度	不偏分散	F-値
級間	T_A	$\phi_A = p - 1$	$s_A^2 = \frac{1}{\phi_A} T_A$	$F = \frac{s_A^2}{s_e^2}$
級内（残差）	T_e	$\phi_e = n - p$	$s_e^2 = \frac{1}{\phi_e} T_e$	
全体	T	$\phi = n - 1$		

1.3.1　一元配置分散分析

1つの因子の中で各水準間に差があるかを検定する。つまり、実験結果の各値を、主効果となり得る母平均からの水準ごとの差 α_j と実験結果固有の誤差 ε_{ij} として

$$x_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

としたとき、各水準の母平均 μ_j が $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ であることを検定する。

■手順 1　仮説をたてる。

$$\begin{cases} H_0 & ：帰無仮説　水準間に差はない。\\ H_1 & ：対立仮説　水準間に差がある。（ここでは片側検定） \end{cases}$$

H_0 について次の3つは等価である。

- 各水準ごとの母平均は等しい。$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
- 水準間の不偏標本分散と全体の標本誤差の不偏標本分散が等しい。$s_A^2 = s_e^2$
- 全体の母平均からの水準ごとの差はゼロ。$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

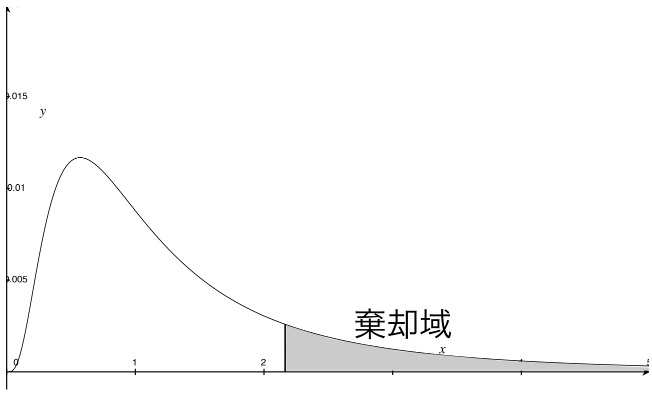
この3種は、いずれも水準間には差がないことを表している。
H_1 は $s_A^2 > s_e^2$ とする片側検定を行う。

注意：ここでの検定は水準間に差がないことを帰無仮説としている。これを各水準における観測データの違いが、観測誤差による違い比べて有意に差があるかどうかで判断している訳だから、誤差の方が大きい場合に興味はない。よって、対立仮説を水準間の不偏標本分散の方が標本誤差の不偏標本分散よりも大きいとして常に片側検定を行う。

■手順 2　一元配置分散分析表を作成する。

	平方和	自由度	不偏分散	F-値
級間	T_A	$\phi_A = p - 1$	$s_A^2 = \frac{1}{\phi_A} T_A$	$F = \frac{s_A^2}{s_e^2}$
級内（残差）	T_e	$\phi_e = n - p$	$s_e^2 = \frac{1}{\phi_e} T_e$	
全体	T	$\phi = n - 1$		

■手順 3　有意水準 α として一元配置分散分析表で求めた F-統計量について棄却域を求める。



■手順４　手順１、手順２および手順３に従って標本から求めた統計量が棄却域に含まれるか判断する。

- 棄却域に含まれるならば H_0 を棄却し、H_1 を採択する。
- 棄却域に含まれないならば H_0 を採択する。

例題１：一元配置分散分析

先の例で具体的な結論を求める。ラットの肝臓の重量とえさの関係を調べる実験を考える。測定の結果は、次表の通りであった。

水準	ビーフジャーキー	モンプチ	ビタワン	
	3.42	3.17	3.64	
	3.87	3.63	3.72	
	3.96	3.47	3.91	
	3.76	3.44		
		3.39		
合計	15.01	17.1	11.27	総計 $S = 43.38$
データの大きさ	4	5	3	$n = 12$
平均	$\bar{x}_1 = 3.75$	$\bar{x}_2 = 3.42$	$\bar{x}_3 = 3.76$	$\bar{x} = 3.62$

■手順１　仮説をたてる。

$$\begin{cases} H_0 & \text{：帰無仮説　水準間に差はない。つまり、えさは肝臓の重量に影響しない。} s_A^2 = s_e^2 \\ H_1 & \text{：対立仮説　水準間に差がある。えさによる肝臓の重量への影響がある。} s_A^2 > s_e^2 \end{cases}$$

■手順２　一元配置分散分析表を作成する。

$$T_A = 4(3.75-3.62)^2 + 5(3.42-3.62)^2 + 3(3.76-3.62)^2 = 0.32$$

$$T = \sum_{i=1}^{\text{個数 }[4,5,3]} \sum_{j=1}^{3} (x_{ij} - 3.62)^2 = 0.64$$

$$T_e = T - T_A = 0.64 - 0.32 = 0.32$$

いま、$p=3$ であり、$n=12$ なので、

$$\phi_A = p-1 = 3-1 = 2$$
$$\phi = n-1 = 12-1 = 11$$
$$\phi_e = \phi - \phi_A = 11-2 = 9$$

これらを用いて一元配置分散分析表を完成させると、

	平方和	自由度	不偏分散	F-値
級間	$T_A = 0.32$	$\phi_A = 2$	$s_A^2 = \frac{1}{2}0.32$	$F = \frac{\frac{0.32}{2}}{\frac{0.32}{9}} = \frac{9}{2} = 4.5$
級内（残差）	$T_e = 0.32$	$\phi_e = 9$	$s_e^2 = \frac{1}{9}0.32$	
全体	$T = 0.64$	$\phi = 11$		

■手順３　有意水準 $\alpha = 5$ ％として棄却域を求める。F-分布の数表より $F_9^2(0.05) = 4.26$ なので、棄却域は 4.26 の右側。

■手順４　一元配置分散分析表より、検定統計量は 4.5 だったので棄却域に含まれる。よって、えさによる肝臓の重量に差があるといえる。

1.4　二元配置分散分析

２つの因子に属するデータがどちらの影響を受けているかを検定によって調べる。つまり、実験結果の各値を、主効果となり得る母平均からの水準ごとの差 α_j および β_i と交互作用効果の γ_{ij} 実験結果固有の誤差 ε_{ijk} として

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_j + \beta_i + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

としたとき、三つの帰無仮説 $H_0 : \alpha_j = 0$、$H_0' : \beta_i = 0$ および $H_0'' : \gamma_{ij} = 0$ について検定する。ここで、

$$\begin{cases} i : 1 \sim l \\ j : 1 \sim m \\ k : 1 \sim n \end{cases}$$

■二元配置データ　例として、4 つの水準を持つ因子 A と 3 つの水準を持つ因子 B についてそれぞれ、繰り返し数が 2 である場合についてデータは次の表のように表せる。

	A_1	A_2	A_3	A_4	計	平均 $[\bar{x}_{i\cdot\cdot}]$
B_1	x_{111}	x_{121}	x_{131}	x_{141}	$S_{1\cdot\cdot}$	$\bar{x}_{1\cdot\cdot}$
	x_{112}	x_{122}	x_{132}	x_{142}		
B_2	x_{211}	x_{221}	x_{231}	x_{241}	$S_{2\cdot\cdot}$	$\bar{x}_{2\cdot\cdot}$
	x_{212}	x_{222}	x_{232}	x_{242}		
B_3	x_{311}	x_{321}	x_{331}	x_{341}	$S_{3\cdot\cdot}$	$\bar{x}_{3\cdot\cdot}$
	x_{312}	x_{322}	x_{332}	x_{342}		
計	$S_{\cdot1\cdot}$	$S_{\cdot2\cdot}$	$S_{\cdot3\cdot}$	$S_{\cdot4\cdot}$	S	
平均 $[\bar{x}_{\cdot j\cdot}]$	$\bar{x}_{\cdot1\cdot}$	$\bar{x}_{\cdot2\cdot}$	$\bar{x}_{\cdot3\cdot}$	$\bar{x}_{\cdot4\cdot}$		$\bar{x}$

さらに繰り返し内の平均 $[\bar{x}_{ij\cdot}]$ として、繰り返し数が 2 なので、

平均 $[\bar{x}_{ij\cdot}]$	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	$\bar{x}_{11\cdot}=\frac{1}{2}(x_{111}+x_{112})$	$\bar{x}_{12\cdot}=\frac{1}{2}(x_{121}+x_{122})$	$\bar{x}_{13\cdot}=\frac{1}{2}(x_{131}+x_{132})$	$\bar{x}_{14\cdot}=\frac{1}{2}(x_{141}+x_{142})$
B_2	$\bar{x}_{21\cdot}=\frac{1}{2}(x_{211}+x_{212})$	$\bar{x}_{22\cdot}=\frac{1}{2}(x_{221}+x_{222})$	$\bar{x}_{23\cdot}=\frac{1}{2}(x_{231}+x_{232})$	$\bar{x}_{24\cdot}=\frac{1}{2}(x_{241}+x_{242})$
B_3	$\bar{x}_{31\cdot}=\frac{1}{2}(x_{311}+x_{312})$	$\bar{x}_{32\cdot}=\frac{1}{2}(x_{321}+x_{322})$	$\bar{x}_{33\cdot}=\frac{1}{2}(x_{331}+x_{332})$	$\bar{x}_{34\cdot}=\frac{1}{2}(x_{341}+x_{342})$

を準備しておく。また、二元配置分散分析のモデル式は、

$$x_{ijk}=\mu+\alpha_j+\beta_i+\gamma_{ij}+\varepsilon_{ijk}$$

ここで、

$$\begin{cases} l &= 3 \\ m &= 4 \\ n &= 2 \end{cases}$$

■二元配置分散分析表　まず、変動要因に対応する平方和を求めておく。

- 因子 A の級間変動

$$T_A = ln\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_{\cdot j\cdot}-\bar{x})^2$$

- 因子 B の級間変動

$$T_B = mn\sum_{i=1}^{l}(\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{x})^2$$

- 交互作用変動

$$T_{A\times B} = n\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{l}(\bar{x}_{ij\cdot}-\bar{x})^2 - T_A - T_B$$

- 全変動

$$T=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk}-\bar{x})^2$$

つぎに、級内の残差について求める。

- 級内変動（残差）

$$T_e = T - T_A - T_B - T_{A\times B}$$

自由度については、級間の自由度と全体の自由度を求めてから、級内残差の自由度を求めておく。

- 級間の自由度、因子 A

$$\phi_A = m-1$$

- 級間の自由度、因子 B

$$\phi_B = l - 1$$

- 交互作用の自由度

$$\phi_{A\times B} = \phi_A \times \phi_B$$

- 全体の自由度

$$\phi = l \times m \times n - 1$$

- 級内残差の自由度

$$\phi_e = \phi - \phi_A - \phi_B - \phi_{A\times B}$$

要因	平方和	自由度	不偏分散	F-値
A	T_A	$\phi_A = m - 1$	$s_A^2 = \frac{1}{\phi_A} T_A$	$F = \frac{s_A^2}{s_e^2}$
B	T_B	$\phi_B = l - 1$	$s_B^2 = \frac{1}{\phi_B} T_B$	$F = \frac{s_B^2}{s_e^2}$
$A \times B$	$T_{A\times B}$	$\phi_{A\times B} = \phi_A \times \phi_B$	$s_{A\times B}^2 = \frac{1}{\phi_{A\times B}} T_{A\times B}$	$F = \frac{s_{A\times B}^2}{s_e^2}$
級内（残差）	T_e	$\phi_e = \phi - \phi_A - \phi_B - \phi_{A\times B}$	$s_e^2 = \frac{1}{\phi_e} T_e$	
全体	T	$\phi = l \times m \times n - 1$		

1.4.1 二元配置分散分析

■手順１　仮説をたてる。

$$\begin{cases} H_0 & \text{：帰無仮説　各因子に主効果はない。および因子間の交互作用効果はない。} \\ H_1 & \text{：対立仮説　どれかの因子に主効果がある。もしくは因子間に交互作用効果がある。（ここでは片側検定）} \end{cases}$$

すなわち、三つの帰無仮説 H_0 ： $\alpha_j = 0$、H_0' ： $\beta_i = 0$ および H_0'' ： $\gamma_{ij} = 0$ について同時に検定する。

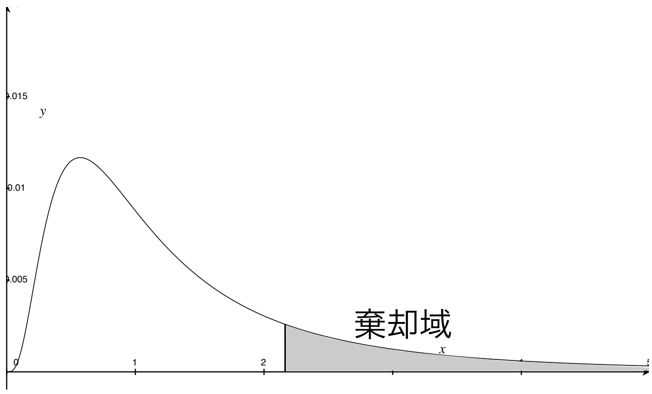
■手順２　二元配置分散分析表を作成する。

要因	平方和	自由度	不偏分散	F-値
A	T_A	$\phi_A = m - 1$	$s_A^2 = \frac{1}{\phi_A} T_A$	$F = \frac{s_A^2}{s_e^2}$
B	T_B	$\phi_B = l - 1$	$s_B^2 = \frac{1}{\phi_B} T_B$	$F = \frac{s_B^2}{s_e^2}$
$A \times B$	$T_{A\times B}$	$\phi_{A\times B} = \phi_A \times \phi_B$	$s_{A\times B}^2 = \frac{1}{\phi_{A\times B}} T_{A\times B}$	$F = \frac{s_{A\times B}^2}{s_e^2}$
級内（残差）	T_e	$\phi_e = \phi - \phi_A - \phi_B - \phi_{A\times B}$	$s_e^2 = \frac{1}{\phi_e} T_e$	
全体	T	$\phi = l \times m \times n - 1$		

■手順３　有意水準 α として二元配置分散分析表で求めた各 F-統計量について棄却域を求める。

■手順４　手順１、手順２および手順３に従って標本から求めた統計量がそれぞれ棄却域に含まれるか判断する。

- 棄却域に含まれるならば H_0 を棄却し、H_1 を採択する。
- 棄却域に含まれないならば H_0 を採択する。



例題２：二元配置分散分析

マウスの体重についての二元配置データ

因子 A：季節 $\begin{cases} A_1\text{水準 1 ：春} \\ A_2\text{水準 2 ：夏} \\ A_3\text{水準 3 ：秋} \\ A_4\text{水準 4 ：冬} \end{cases}$ 因子 B：えさ $\begin{cases} B_1\text{水準 1 ：ビーフジャーキー} \\ B_2\text{水準 2 ：モンプチ} \\ B_3\text{水準 3 ：ビタワン} \end{cases}$

	A_1	A_2	A_3	A_4	計	平均 $\bar{x}_{i\cdot\cdot}$
B_1	115	132	134	101	975	121.875
	112	135	132	114		
B_2	128	123	136	119	1023	127.875
	132	125	140	120		
B_3	104	113	136	116	951	118.875
	108	116	139	119		
計	699	744	817	689	2949	
平均 $\bar{x}_{\cdot j\cdot}$	116.5	124	136.17	114.83		122.875

■手順１　仮説をたてる。

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_j + \beta_i + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$\begin{cases} H_0 & \text{：帰無仮説　各因子に主効果はない。および因子間の交互作用効果はない。} \\ H_1 & \text{：対立仮説　どれかの因子に主効果がある。もしくは因子間に交互作用効果がある。（ここでは片側検定）} \end{cases}$

すなわち、三つの帰無仮説 H_0 ： $\alpha_j = 0$、H_0' ： $\beta_i = 0$、および H_0'' ： $\gamma_{ij} = 0$ について同時に検定する。これは $s_A^2 = s_e^2$、$s_B^2 = s_e^2$、および $s_{A\times B}^2 = s_e^2$ である。

■手順２　二元配置分散分析表を作成する。

- 因子 A の級間変動

$$T_A = ln\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_{\cdot j \cdot} - \bar{x})^2 = 1699.458$$

- 因子 B の級間変動

$$T_B = mn\sum_{i=1}^{l}(\bar{x}_{i \cdot\cdot} - \bar{x})^2 = 336$$

- 交互作用変動

$$T_{A\times B} = n\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{l}(\bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x})^2 - T_A - T_B = 823.6667$$

- 全変動

$$T = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x})^2 = 2994.625$$

- 級内変動（残差）

$$T_e = T - T_A - T_B - T_{A\times B} = 135.5$$

- 級間の自由度、因子 A

$$\phi_A = m - 1 = 4 - 1 = 3$$

- 級間の自由度、因子 B

$$\phi_B = l - 1 = 3 - 1 = 2$$

- 交互作用の自由度

$$\phi_{A\times B} = \phi_A \times \phi_B = 3 \times 2 = 6$$

- 全体の自由度

$$\phi = l \times m \times n - 1 = 4 \times 3 \times 2 - 1 = 23$$

- 級内残差の自由度

$$\phi_e = \phi - \phi_A - \phi_B - \phi_{A\times B} = 23 - 3 - 2 - 6 = 12$$

要因	平方和	自由度	不偏分散	F-値
A	1699.458	$\phi_A = 3$	$s_A^2 = \frac{1}{3}1699.458 = 566.486$	$F = \frac{s_A^2}{s_e^2} = 50.176$
B	336	$\phi_B = 2$	$s_B^2 = \frac{1}{2}336 = 168$	$F = \frac{s_B^2}{s_e^2} = 14.88$
$A \times B$	823.6667	$\phi_{A\times B} = 6$	$s_{A\times B}^2 = \frac{1}{6}823.667 = 137.2778$	$F = \frac{s_{A\times B}^2}{s_e^2} = 12.159$
級内（残差）	135.5	$\phi_e = 12$	$s_e^2 = \frac{1}{12}135.5 = 11.29$	
全体	2994.625	$\phi = 23$		

■手順３　有意水準 $\alpha = 5$ ％として棄却域を求める。F-分布の数表より、因子 A、因子 B、交互作用それぞれの棄却域は $F^3_{12}(0.05) = 3.49$、$F^2_{12}(0.05) = 3.89$、$F^6_{12}(0.05) = 3.00$ の右側が棄却域。

■手順４　二元配置分散分析表より、因子 A、因子 B、交互作用それぞれにおける検定統計量は、いずれもすべて棄却域に含まれる。よって、因子 **A**、因子 **B** のいずれも主効果をもち、交互作用効果もあるといえる。なお、有意水準を１％に緩めてみてもすべて棄却される。

1.4.2　主効果モデル

二元配置分散分析において、繰り返し数が 1 のとき、つまり、さきの $l,\ m,\ n$ のうち $n = 1$ のとき、交互作用効果の γ_{ij} は誤差と区別できないので、実験結果の各値を、主効果となり得る母平均からの水準ごとの差 α_j および β_i と実験結果固有の誤差 ε_{ij} として

$$x_{ij} = \mu + \alpha_j + \beta_i + \varepsilon_{ij}$$

としたとき、二つの帰無仮説 $H_0\ :\ \alpha_j = 0$、$H_0'\ :\ \beta_i = 0$ について検定する。どの因子が主効果であるかのみを判定するこのモデルを主効果モデルという。

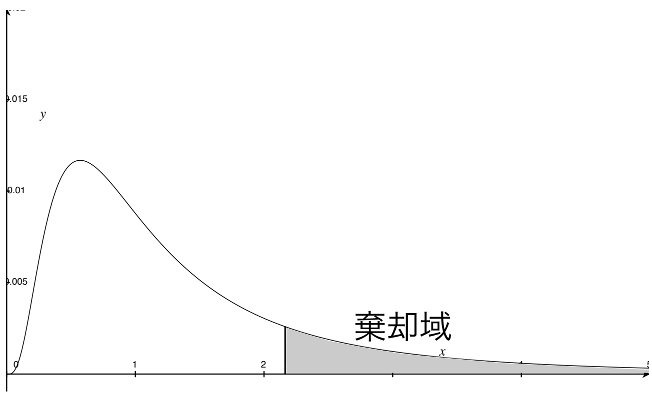
■手順１　仮説をたてる。

$$\begin{cases} H_0 & \text{：帰無仮説　各因子に主効果はない。} \\ H_1 & \text{：対立仮説　どれかの因子に主効果がある。（ここでは片側検定）} \end{cases}$$

■手順２　主効果モデル二元配置分散分析表を作成する。

要因	平方和	自由度	不偏分散	F-値
A	T_A	$\phi_A = m - 1$	$s_A^2 = \frac{1}{\phi_A} T_A$	$F = \frac{s_A^2}{s_e^2}$
B	T_B	$\phi_B = l - 1$	$s_B^2 = \frac{1}{\phi_B} T_B$	$F = \frac{s_B^2}{s_e^2}$
級内（残差）	T_e	$\phi_e = \phi - \phi_A - \phi_B$	$s_e^2 = \frac{1}{\phi_e} T_e$	
全体	T	$\phi = l \times m - 1$		

■手順３　有意水準 α として主効果モデル二元配置分散分析表で求めた各 F-統計量について棄却域を求める。



■手順４　手順１、手順２および手順３に従って標本から求めた統計量がそれぞれ棄却域に含まれるか判断する。

- 棄却域に含まれるならば H_0 を棄却し、H_1 を採択する。
- 棄却域に含まれないならば H_0 を採択する。

2 母数によらない方法

2.1 適合度検定

2.1.1 基本用語の導入

■理論度数 度数分布について扱う現象の理論的な分布に基づく期待値を期待度数、理論度数または理論期待値という。

例）さいころを 90 回振ったら各目の出る理論度数は 15 回である。

■観測度数 観測値そのもので、理論度数に対応する値を観測度数という。

2.1.2 適合度検定の概要

標本が取り得る事象が $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k$ の k 個であるとする。このとき、それぞれの事象に対応する確率が $p_1, p_2, \cdots, p_k$ であると理論的に考えられるとき、この理論分布は観測値からの標本分布に適合しているかを検定することが適合度検定である。いま、各事象に対応する観測度数（各事象が出た回数）は o_i として、全観測度数の和（観測総数）を n 回とする。事象 ω_1 の出現する確率が p_1、事象 ω_2 の出現する確率が p_2、事象 ω_k の出現する確率が p_k であるから、理論度数は $f_1 = np_1, f_2 = np_2, \cdots, f_k = np_k$ となる。そのとき、データを分類すると次の表にまとめられる。

事象	ω_1	ω_2	$\cdots\cdots\cdots$	ω_k	計
観測度数	o_1	o_2	$\cdots\cdots\cdots$	o_k	n
理論度数	f_1	f_2	$\cdots\cdots\cdots$	f_k	n

このとき、観測度数から推定した推定確率を p_i^0 とするとき、理論確率 p_i と適合しているかどうか

$$H_0 : \text{帰無仮説} \quad p_1 = p_1^0, p_2 = p_2^0, \cdots, p_k = p_k^0$$

を検定することになる。

このとき、検定統計量はパラメータの推定数を l としたとき、

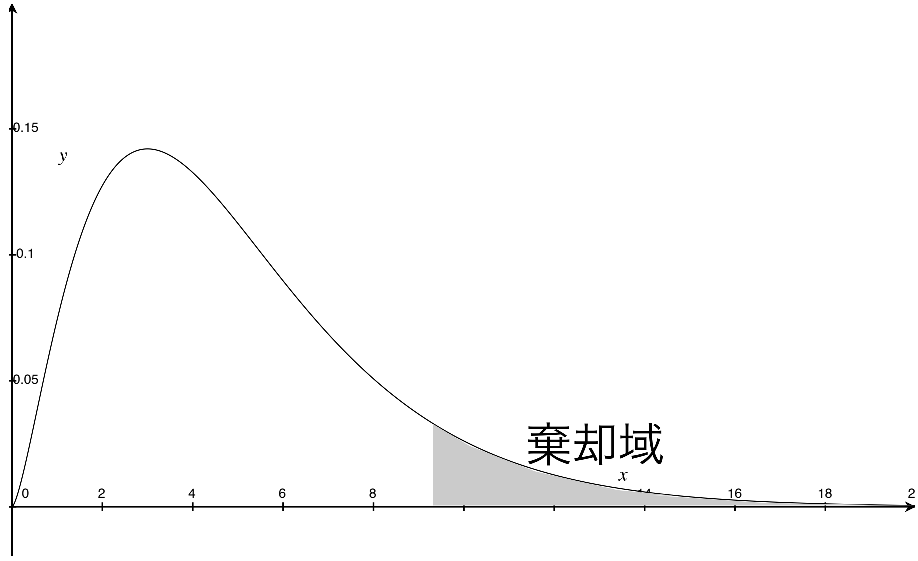
$$X = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - f_i)^2}{f_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\text{観測度数} - \text{理論度数})^2}{\text{理論度数}}$$

である。このとき自由度 $k - l - 1$ の χ^2-分布に従う。

2.1.3 適合度検定における留意事項

■注意１ 適合度検定は、観測総数 n と各事象に対応する確率 p_i としたとき、n が十分大きいとしたとき成り立つ。十分大きいときとは正規近似のときと同様に $np_i \geq 5$ を条件とする。

■注意２ 理論度数と観測度数の関係においてその差が小さいほど理論分布によるあてはまりがよいことであるから、検定を棄却されるときのことを考えると、あてはまりが良くない場合は検定統計量がが大きいときであるから上側による片側検定となる。



2.1.4　パラメータの推定がない場合

■手順１　仮説をたてる。

$$\begin{cases} H_0 & : \text{帰無仮説　観測度数と理論度数は適合しておりこの理論分布は適合している。} \\ H_1 & : \text{対立仮説　この理論分布は適合していない（上側片側検定）} \end{cases}$$

■手順２　統計量を導入する。適合度検定における検定統計量は、

$$X = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - f_i)^2}{f_i}$$

この X は、自由度 $k-1$ の χ^2-分布 χ^2_{k-1} に従う。

■手順３　有意水準 α として導入した統計量について棄却域を求める。

■手順４　手順１、手順２および手順３に従って標本から求めた統計量が棄却域に含まれるか判断する。

- 棄却域に含まれるならば H_0 を棄却し、H_1 を採択する。
- 棄却域に含まれないならば H_0 を採択する。

2.1.5　パラメータの推定がある場合

　データから未知の母数を推定する必要がある場合には、手順２において導入する検定統計量について自由度が推定したパラメータの数だけ少なくなる。

■手順１　想定した分布のパラメータをデータから推定する。２項分布なら確率 p、ポアソン分布なら平均 μ など。

■手順２　仮説をたてる。

$$\begin{cases} H_0 & \text{：帰無仮説　観測度数と理論度数は適合しておりこの理論分布は適合している。} \\ H_1 & \text{：対立仮説　この理論分布は適合していない（上側片側検定）} \end{cases}$$

■手順３　統計量を導入する。適合度検定における検定統計量は、推定したパラメータの数を l とするとき、

$$X = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - f_i)^2}{f_i}$$

この X は、自由度 $k-l-1$ の χ^2-分布 χ^2_{k-l-1} に従う。

■手順４　有意水準 α として導入した統計量について棄却域を求める。

■手順５　手順１、手順２および手順３に従って標本から求めた統計量が棄却域に含まれるか判断する。

- 棄却域に含まれるならば H_0 を棄却し、H_1 を採択する。
- 棄却域に含まれないならば H_0 を採択する。

例題１：適合度検定パラメータの推定がない場合

さいころを 90 回振ったとき、観測度数は次の通りであった。このとき、このさいころは正しいと言えるか。

さいころの目	1	2	3	4	5	6	計
観測度数	12	15	18	16	15	14	90
理論度数	15	15	15	15	15	15	90

■手順１

$$\begin{cases} H_0 & \text{：帰無仮説　観測度数と理論度数は適合しておりこの理論分布は適合している。} \\ H_1 & \text{：対立仮説　この理論分布は適合していない（上側片側検定）} \end{cases}$$

帰無仮説 $H_0 : p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{6}, \cdots p_k = \frac{1}{6}$ について片側検定する。

■手順２　統計量の導入。

$$X = \sum_{i=1}^{6} \frac{(o_i - 15)^2}{15} = \frac{(12-15)^2}{15} + \frac{(15-15)^2}{15} + \cdots + \frac{(14-15)^2}{15} = 1.33$$

■手順３　自由度 $6-1=5$ の χ^2-分布において有意水準 $\alpha = 0.05$ とすると数表から $\chi^2_5(0.05) = 11.0705$ なので、11.0705 の右側である。

■手順４　検定統計量は棄却域に含まれない。よって、さいころは正しくないとはいえない。

例題２：適合度検定パラメータの推定がある場合

１日の交通事故件数を１５５日間調べたら次に表に示すデータが得られた。１日あたりの事故件数はポアソン分布に従っているか検定せよ。

事故件数	0	1	2	3	4 件以上	計
日数	80	60	13	1	1	155

■手順 1　ポアソン分布の確率関数 $\mathrm{Po}(\mu)$ はパラメータ μ を含む。

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} \qquad (x = 0, 1, \cdots)$$

したがって、まず、データから平均を推定する。

$$\hat{\mu} = \frac{80 \times 0 + 60 \times 1 + 13 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 4}{155} = 0.6$$

これにより、確率関数から相対度数が求まる。

$$p_0 = \frac{0.6^0}{0!}e^{-0.6} = 0.5488116360940264$$
$$p_1 = \frac{0.6^1}{1!}e^{-0.6} = 0.32928698165641584$$
$$p_2 = \frac{0.6^2}{2!}e^{-0.6} = 0.09878609449692474$$
$$p_3 = \frac{0.6^3}{3!}e^{-0.6} = 0.019757218899384 95$$
$$p_4 = \frac{0.6^4}{4!}e^{-0.6} = 0.002963582834907742$$

$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ である。表に付け加えると、

事故件数	0	1	2	3	4 件以上	計
日数	80	60	13	1	1	155
相対度数	$p_0 = 0.54881$	$p_1 = 0.32929$	$p_2 = 0.098786$	$p_3 = 0.019757$	$p_4 = 0.0029635$	1

これにより、理論度数は、np_i で求まるのだから、いま、$n = 155$ なので、さらに表に加えると、

事故件数	0	1	2	3	4 件以上	計
日数	80	60	13	1	1	155
相対度数	$p_0 = 0.54881$	$p_1 = 0.32929$	$p_2 = 0.098786$	$p_3 = 0.019757$	$p_4 = 0.0029635$	1
理論度数	85.0658	51.03948	15.31184	3.062335	0.459355	155

ここで、**注意 1** より、「4 件以上」のときの理論度数が 1 よりも小さく、$np \geq 5$ の条件を満たさない。よって、隣の級と併合するが、「3 件以上」としても $np \geq 5$ を満たさない。さらに併合することで「2 件以上」として表を作成し直す必要がある。

事故件数	0	1	2 件以上	計
日数	80	60	15	155
相対度数	$p_0 = 0.54881$	$p_1 = 0.32929$	$p_2 = 0.1215$	1
理論度数	85.0658	51.03948	18.8335	155

■手順２　仮説をたてる。

$$\begin{cases} H_0 & \text{：帰無仮説　観測度数と理論度数は適合しておりこの理論分布は適合している。} \\ H_1 & \text{：対立仮説　この理論分布は適合していない（上側片側検定）} \end{cases}$$

帰無仮説 $H_0 : p_0 = 0.54881, p_1 = 0.32929, p_2 = 0.1215$ について片側検定する。

■手順３　統計量を導入する。適合度検定における検定統計量は、

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=0}^{3} \frac{(o_i - f_i)^2}{f_i} = \frac{(80 - 85.0658)^2}{85.0658} + \frac{(60 - 51.03948)^2}{51.03948} + \frac{(15 - 18.8335)^2}{18.8335} \\ &= \frac{25.6623}{85.0658} + \frac{80.2909}{51.03948} + \frac{14.6957}{18.8335} = 0.301676 + 1.5731 + 0.78 = 2.655 \end{aligned}$$

この X は、カテゴリーの数 $k = 3$ およびパラメータの推定数 $l = 1$ であったので、自由度 $3 - 1 - 1$ の χ^2-分布 χ_1^2 に従う。

■手順４　有意水準 $\alpha = 0.05$ として棄却域を数表から求めると、自由度 1 の χ^2-分布 $\chi_1^2(0.05) = 3.84146$ であるから、棄却域は 3.84146 の右側である。

■手順５　検定統計量は棄却域に含まれない。よって、<u>ポアソン分布に従っていないとはいえない。</u>

索引