確率論 I

石綿 元

第 2 回講義

目次

1　集合と関数

1.1　集合の基本

1.1.1　集合

■**定義**　客観的に区別できるものの集まりを集合という。

例と記号：

- $\emptyset$　空集合
- $\mathbf{N}$　自然数全体のなす集合
- $\mathbf{Z}$　整数全体のなす集合
- $\mathbf{Q}$　有理数全体のなす集合
- $\mathbf{R}$　実数全体のなす集合
- $\mathbf{C}$　複素数全体のなす集合
- $\mathbf{H}$　４元数全体のなす集合
- $\mathbf{O}$　８元数全体のなす集合
- $\mathbf{S}$　１６元数全体のなす集合

1.1.2　集合に関する記号

■**要素・元　定義**：x が集合 A を構成しているなら、x を集合 A の元または、要素という。

$$x \ \in \ A$$

■**部分集合　定義**：集合 B は、そのすべてが集合 A に属しているならば、集合 B は、集合 A の部分集合という。

$$B \subset A$$

例）　$\boldsymbol{N}$ は $\boldsymbol{Z}$ の部分集合である。$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$

■**全体集合　定義**：いま考えている系ぜんたいを全体集合という。

$$\Omega$$

■**補集合　定義**：全体集合のなかで、集合 A に属さない要素の集まりを集合 A の補集合という。

$$A^c$$

1.1.3　集合の演算

■**積集合　定義**：二つ以上の集合があるとき、それらの集合に共通な部分の要素を集めた集合を積集合もしくは共通部分という。集合 A と B の積集合は、

$$A \cap B$$

■**和集合　定義：**二つ以上の集合があるとき、それらすべての要素を集めた集合を和集合という。集合 A と B の和集合は、

$$A \cup B$$

■**差集合　定義：**二つの集合があるとき、自らの集合に共通な部分の要素を除いた集合を差集合という。集合 A の B との差集合は、

$$A - B$$

1.1.4　集合の公式

■ベキ等則

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

■分配則

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

■吸収則

$$A \cap (A \cup B) = A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$

■復元則

$$(A^c)^c = A$$

■ド・モルガンの法則

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

■複数の集合における演算の記号

$$\text{集合 } A_1 \sim A_n \text{の和集合：} \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$
$$\text{集合 } A_1 \sim A_n \text{の積集合：} \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

このとき、ド・モルガンの法則は、

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c$$
$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c$$

1.1.5　記号の導入

■すべての・任意の　「集合 A に属する**すべての**元 a_i」もしくは「集合 A に属する**任意の**要素 a_i」を次のように表す。

$$\forall a_i \in A$$

■存在する　「集合 A の元に、a_i が**存在する**」を次のように表す。

$$\exists a_i \in A$$

1.1.6　写像と濃度

■写像　定義：<u>集合 A のすべての各元にただ一つ対応する集合 B の元</u>が存在するとき、この対応を集合 A から、集合 B への写像という。このとき、A を始集合、B を終集合という。対応を f とすると、$f : A \to B$ と表す。

　注１）対応する元 $b \in B$ がない A の元が存在するなら写像でない。（A にあまりがあると写像でない）

　注２）対応する元 $b \in B$ が２つ以上もつ元が A に存在するときは写像でない。（A から複数対応していると写像でない）

■単射（１対１写像）　終集合 B の元のうち、A の元と対応しているなら、１対１で対応している場合の写像（B の元の対応に重なりがない）

$$f(\boldsymbol{a_1}) \neq f(\boldsymbol{a_2}) \Rightarrow \boldsymbol{a_1} \neq \boldsymbol{a_2} \quad \text{or} \quad f(\boldsymbol{a_1}) = f(\boldsymbol{a_2}) \Rightarrow \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a_2}$$
$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in A, \quad f(\boldsymbol{a_1}), f(\boldsymbol{a_2}) \in B)$$

■全射（上への写像）　終集合 B のすべての元が始集合 A と対応している場合の写像（B にあまりがない）

$$\forall f(\boldsymbol{a_i}) \in B \Rightarrow \exists \boldsymbol{a_i} \in A$$

■全単射（１対１上への写像）　対応 f が写像であって、全射かつ単射の場合を全単射という。

■逆写像　写像のうち、逆の対応が写像として成立するのは全単射の場合のみである。

■濃度　定義：集合 A と集合 B について、いずれも無限集合を含む一般集合であるとき、
　A と B の濃度が等しいとは、A と B の間に全単射が成立することである。有限集合ならば、「濃度 $=$ 個数」である。

- $\boldsymbol{N}$ の濃度：可算濃度とよび、$\aleph_0$ と書き、アレフゼロという。
- $\boldsymbol{R}$ の濃度：連続濃度とよび、$\aleph$ と書き、アレフという。

1.1.7　集合族と関数

■集合族　集合の集まりを集合族という。

■関数　$X \subset \boldsymbol{R}$ であって、$x \in X$ とする。また、$Y \subset \boldsymbol{R}$ であって、$y \in Y$ とする。このとき、X と Y についての対応が写像であるならば、始集合 X を定義域、終集合 Y を値域とする関数と定義する。

■集合関数　集合 M の部分集合で、集合族 $\mathscr{F}$ に属する集合 E、つまり、

$$E \subset M, \quad E \in \mathscr{F}$$

に対して定義された関数 $\psi(E)$ を、M で定義された $\mathscr{F}-$ 集合関数と定義する。

1.1.8　上限・下限

■カントールの公理

$$\begin{gathered} a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \\ b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots \end{gathered}$$

の 2 つの数列について、

1. $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$
2. n が限りなく大きくなるならば、$b_n - a_n$ は、限りなく 0 に近づく。

1.) かつ 2.) ならば、どんな n に対しても $a_n \leq c \leq b_n$ となる c がただ一つ存在する。

■有界　$S \subset \boldsymbol{R}$ とする。$x \in \boldsymbol{R}$ のとき、$\boldsymbol{R}$ を直線として考えると、x は点である。

- S が上に有界とは、ある数 M が存在して、${}^\forall x \in S$ に対して、$x \leq M$ が成立することであり、この M を S の上界とよぶ。
- S が下に有界とは、ある数 m が存在して、${}^\forall x \in S$ に対して、$x \geq m$ が成立することであり、この m を S の下界とよぶ。
- 上にも下にも有界なとき、有界という。

S が有限集合の場合、必ず有界である。S が無限集合であっても、閉区間 $[a, b]$ も開区間 (a, b) も、いずれも有界。有界でない例としては、$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{Z}$ など。

■ワイエルシュトラスの定理　$\boldsymbol{R}$ の部分集合 S が上に有界ならば、上界の中に最小の上界が存在する。$\boldsymbol{R}$ の部分集合 S が下に有界ならば、下界の中に最大の下界が存在する。

■上限・下限　S が上に有界のときの最小の上界 c を S の上限とよび、次の記号で書く。

$$c = \sup S$$

S が下に有界のときの最大の上界 γ を S の下限とよび、次の記号で書く。

$$\gamma = \inf S$$

1.1.9 ((復習項目)) 線形代数学からの準備 1

■数体 四則演算に閉じている数空間を体とよび、数体上の空間を K とする。

■ベクトル 数体上の空間 K の元 $\boldsymbol{x}$ をベクトルと定義する。

■線形写像の定義 K 上ベクトル空間 V と W の間に写像 $f : V \to W$ があるとき、

1. $\forall \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{b} \in V$ について

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$$

2. $\forall \boldsymbol{a} \in V$ と、スカラー $\alpha \in K$ について

$$f(\alpha \boldsymbol{a}) = \alpha f(\boldsymbol{a})$$

上記の「1.」、「2.」が成立するとき、写像 f は線形写像という。

■線形変換の定義 線形写像 $f : V \to W$ において $V = W$ のときを特に**線形変換**と呼ぶ。つまり、同一空間内での線形写像を線形変換というのである。

■行列式 n 次正方行列 A を、ベクトルを用いて $A = [\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots \boldsymbol{a_n}]$ とする。このとき、行列式 A は、

$$\det A = \sum_{\sigma=\begin{pmatrix}1,2,\cdots n\\ i_1,i_2,\cdots i_n\end{pmatrix}} \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot a_{i_1 1}\cdot a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

ここで、和の記号 $\sum_{\sigma=\begin{pmatrix}1,2,\cdots n\\ i_1,i_2,\cdots i_n\end{pmatrix}}$ は、$n!$ 通りの置換すべてにわたる和を表し、符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は、置換 σ が r 個の互換で表されるならば、$(-1)^r$ である。なお、実用上は、**余因子展開**を行う。また、3 次以下の場合は、サラスの方法が簡便で有効である。

1 次

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

2 次

$$\begin{aligned}\det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

3 次

$$\begin{aligned}\det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} a_{23} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}\end{aligned}$$

1.2　集合と測度

1.2.1　有限加法族

■**定義**　空間 Ω の部分集合の集まり $\mathscr{F}$ が

1. $\Omega \in \mathscr{F}$
2. $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$
3. $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{F}$

1.) 2.) 3.) を満たす集合族 $\mathscr{F}$ を有限加法族と定義する。

1.2.2　有限加法的測度

■**定義**　有限加法族 $\mathscr{F}$ について、その $\mathscr{F}$ の集合関数 $m(A)$ とするとき、

1. ${}^\forall A \in \mathscr{F},\ \ 0 \leq m(A) \leq \infty$
2. $m(\phi) = 0$
3. $A, B \in \mathscr{F},\ \ A \cap B = \phi \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

1.) 2.) 3.) を満たす集合関数 m を $\mathscr{F}$ 上の有限加法的測度（ジョルダン測度）と定義する。

1.2.3　σ-加法族

■**定義**　空間 Ω の部分集合の集まり $\mathscr{F}$ が

1. $\Omega \in \mathscr{F}$
2. $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$
3. $A_n \in \mathscr{F},\ n = 1, 2, \cdots \ \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

1.) 2.) 3.) を満たす集合族 $\mathscr{F}$ を σ-加法族と定義する。（σ-加法族は明らかに有限加法族である。）

1.2.4　測度

■**定義**　空間 Ω の部分集合 $A \subset \Omega$、A の σ-加法族 $\mathscr{F}$ について、$\mathscr{F}$-集合関数 $\mu(A)$ が、

1. $\mu(\phi) = 0$
2. $0 \leq \mu(A) \leq \infty$
3. $A_n \in \mathscr{F},\ n = 1, 2, \cdots,\ A_i \cap A_j = \phi\ (i \neq j) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$

1.) 2.) 3.) を満たす集合関数 μ を $\mathscr{F}$ 上の測度と定義する。

1.2.5　測度空間（可測空間）

■**定義**　空間 Ω の部分集合 $A \subset \Omega$、A の σ-加法族 $\mathscr{F}$、$\mathscr{F}$ 上の測度 μ を組み合わせた空間を測度空間と定義する。このとき、次のように測度空間を表す。

$$(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$$

2　確率と事象

2.1　確率の定義

2.1.1　事象の公理

■定義　σ-加法族の要素を事象と定義する。

言い換えると、実験を行い観測を行うことを試行といい、試行の結果は、そのうちのひとつの実現値である。つまり、試行を σ-加法族とみたてると、試行の結果は、その要素を構成している。つまり、試行の結果を事象と呼ぶ。

2.1.2　確率の公理

■定義　σ-加法族 $\mathscr{F}$ で定義された実数値関数を P とするとき、

1. ${}^{\forall}A \in \mathscr{F},\ 0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1,\ \ P(\phi) = 0$
3. $A_n \in \mathscr{F},\ n = 1, 2, \cdot,\ \ {}^{\forall}(i \neq j),\ A_i \cap A_j = 0 \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

1.) 2.) 3.) を満たす P を確率と定義する。

例）さいころを一つ転がすことを例に考えてみよう。さいころを一つ転がす試行についての事象は「1 の目が出る」から「6 の目が出る」までの 6 個ある。定義で言う A を、素直に出た目の数に着目したとして、「A_1: 1 の目が出る」「A_2: 2 の目が出る」のように考えると、「A_6: 6 の目が出る」までの 6 個だから、このときの標本空間は、

$$\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$$

これらは、事象であるから「事象の定義」より ${}^{\forall}A \in \mathscr{F}$。また、

$${}^{\forall}(i \neq j),\ A_i \cap A_j = 0 \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{6} A_n\right) = \sum_{n=1}^{6} P(A_n)$$

が成り立っていて、$P(\Omega) = 1$ である。ここで、これらを満たす確率 P とは、正しいさいころと考えると、

$$P(A_i) = \frac{1}{6}$$

2.1.3　数学的確率

どの事象も同様に確からしく起こり、標本の大きさが n としたとき、この標本の中から事象 A が起こる場合の数を r と表現するならば、

$$P(A) = \frac{r}{n}$$

このとき、$P(A)$ を数学的確率という。

上記の「さいころを一つ転がす例」では、正しいさいころで $n = 6, r = 1$ の場合を考えたのである。着目を変えて、出た目の数ではなく、出た目の偶奇に着目すれば、$n = 6, r = 3$ になることは簡単に理解できる。

2.1.4 統計的確率

n 回試行した結果、事象 A が r_n 回起こったという経験的事実が得られたとしたとき、試行回数 n を増やしてみると一定の値に近づくことが観測されたとする。つまり、

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n}$$

このとき、$P(A) = p$ と表し、$P(A)$ を統計的確率という。

この場合、観測するまで標本空間の事象の分布はわからない。「どの事象も同様に確からしく起こる」かどうかがわからないならば、数学的確率としての確率を表現できないが、観測結果から確率の公理を満たす確率 P を考えることはできるのである。

2.1.5 確率空間

■定義 任意の集合 Ω に対して事象と確率が定義されているとき、$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ を確率空間と定義する。このとき、Ω を標本空間と定義する。

2.1.6 根元事象

■定義 確率空間 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ の部分集合である事象 A に含まれるすべての要素を根元事象と定義する。すなわち、標本空間のうち、分離できない事象である。

2.2 事象の独立と排反

2.2.1 排反事象

■定義 事象 A と B に共通部分がない場合、互いに排反事象とよぶ。つまり、事象 A が起こったならば、同時に事象 B は起こりえないとき、事象 A と B は排反であると定義する。このとき、確率の公理より当然、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

が成立する。

例）一つのさいころを一回振る試行を行うとき、出た目が奇数という事象を A とするとき、偶数の目が出る事象 B は排反事象である。

2.2.2 独立事象

■定義 事象 A が起こる起こらないに関わらず、事象 B が起こる確率 $P(B)$ に何ら影響を与えない場合、事象 A と事象 B は独立であるという。このとき、２つの事象 $A,\ B$ について、

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

が成立し、$A,\ B$ は、互いに独立と定義する。

例）赤いさいころと青いさいころの二つのさいころを振る試行を行うとき、赤いさいころの出る目のが奇数である事象を A として青いさいころの出る目が奇数である事象を B とするとき、事象 A に関わらず、事象 B の確率に何ら影響しない。よって、事象 A と事象 B は独立事象である。

2.2.3 複数事象の独立

■**定義**　n 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ について、

1.
$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$$

2. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の中の任意の $n-1$ 個の事象が独立。

1.) 2.) が成立するとき、$A_1, A_2, \cdots, A_n$ は独立と定義する。

2.3 確率空間の基本性質

2.3.1 定理

$A,\ B \in \mathscr{F}$ を事象とするとき、

$$A \subset B \Rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A)$$

proof)$A \subset B$ だから、

$$B = A \cup (B-A)$$

A と $(B-A)$ は、排反であるから、

$$P(B) = P(A) + P(B-A)$$

よって、

$$P(B-A) = P(B) - P(A)$$

2.3.2 定理

$A,\ B \in \mathscr{F}$ を事象とするとき、

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

proof) 定理 4.2.1 より

$$P(A) = P(B) - P(B-A)$$

ここで、$P(B-A) \geq 0$ だから、

$$P(A) \leq P(B)$$

2.3.3　定理

$A \in \mathscr{F}$ を事象とするとき、

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

proof) 定理 4.2.1 より、B を Ω と取り替えて考えると、$(\Omega - A) = A^c$ だから、

$$\begin{aligned} P(A^c) &= P(\Omega) - P(A) \\ &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

2.3.4　定理

$A,\ B \in \mathscr{F}$ を事象とするとき、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

proof)

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

右辺の 3 項は、互いに排反 (共通の重なりがない) であるから、

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) \tag{1}$$

1. ここで、

$$A - B = A - (A \cap B)$$

また、

$$A \cap B \subset A$$

だから、定理 4.2.1 より、

$$P(A - (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B)$$

ここで、$P(A - (A \cap B)) = P(A - B)$ だから、

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

2. さらに

$$B - A = B - (A \cap B)$$

また、$A \cap B \subset B$ だから、定理 4.2.1 より、

$$P(B - (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$$

ここで、$P(B - (A \cap B)) = P(B - A)$ だから、

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

よって、式 (1) に戻れば、1.) 2.) より、

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

2.3.5　定理

事象 $A_1, A_2, \cdots$ とするとき、

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

proof)

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 - A_1 \\ B_3 &= A_3 - (A_1 \cup A_2) \\ &\cdots \\ &\cdots \end{aligned}$$

とすると、$B_1, B_2, \cdots$ は、互いに排反である。また、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

よって、

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \tag{2}$$

また、

$$A_n \supset B_n$$

定理 4.2.2 より、

$$P(A_n) \geq P(B_n) \tag{3}$$

各 $B_1, B_2, \cdots$ は、互いに排反なので、

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \tag{4}$$

式 (2)、式 (3)、式 (4) より、

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

2.4　条件付き確率と乗法の定理

2.4.1　条件付き確率

■定義　2 つの事象 $A,\ B$ について「事象 A が起こったという条件のもとで」事象 B が起こるとき、$B|A$ と書く。このとき、$P(B|A)$ を条件 A のもとで B が起こる条件付き確率といい、

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

と定義する。

2.4.2　乗法の定理

条件付き確率の定義より、

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

2.5　ベイズの定理

2.5.1　事前確率

全標本空間 Ω の各事象を H_i として、各 H_i は排反であるとすると、

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n$$

また、各事象の確率 $P(H_i)$ は、すべて既知とする。この $P(H_i)$ を事前確率という。

2.5.2　全確率の定理

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$$

これを全確率の定理という。

■全確率の定理の確認　各事象 H_i の起こる条件の下で事象 A が起こる条件付き確率 $P(A|H_i)$ も既知とする。このとき、事象 A の起こる確率は、H_i のすべての事象と事象 A の共通部分の確率なので、

$$P(A) = P(A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n))$$

集合の分配則を用いて、

$$P(A) = P((A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \cdots \cup (A \cap H_n))$$

確率の加法公式を用いて、各 H_i は排反であったから、

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \cdots + P(A \cap H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i)$$

乗法の定理を用いて、

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$$

全確率の定理が導出される。

2.5.3　ベイズの定理

$$P(H_i|A) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}$$

これをベイズの定理という。

条件 A が起こった後に候補 H_i が起こる確率を意味しており、事後確率とも呼ばれる。

索引